# CALCOLO DEI LIMITI

## 1) Limiti che si presentano nella forma $\frac{1}{0}$.

Pur non essendo forme indeterminate (il risultato è indicato convenzionalmente con $\infty$[i], nel senso che la funzione tende, in valore assoluto, a $+\infty$), il calcolo del segno dell'infinito di queste forme non è banale. Nelle forme che tradizionalmente vengono proposte al liceo, i limiti sinistro e destro esistono, anche se possono spesso differire nel segno. Il problema è quindi quello di calcolare il segno della funzione in un opportuno intorno bucato di $x_0$ (nelle sue vicinanze). Per fortuna ci viene in aiuto il teorema della permanenza del segno: tutte le quantità che ammettono limite positivo (compreso $+\infty$) sono, se x è abbastanza vicino ad $x_0$, positive, mentre quelle che ammettono limite negativo (compreso $-\infty$) sono negative se x è abbastanza vicino ad $x_0$. Poiché il teorema citato non fornisce alcuna informazione sulle quantità che tendono a 0[ii], occorrerà studiare il loro segno per verificarne, caso per caso, il comportamento. Quando una quantità tende a 0 mantenendosi positiva indicheremo il suo limite con il simbolo $0^+$, mentre quando tende a 0 mantenendosi negativa lo indicheremo con $0^-$.

Esempio:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x+2}{9-x^2}=\frac{3+2}{9-3^2}=\frac{5}{0}=\infty .$$

Per calcolare il segno dell'infinito dobbiamo studiare il segno della sola quantità che tende a 0 (ovvero $9-x^2$), e distinguere il limite sinistro da quello destro (anche se non espressamente richiesto dal testo).

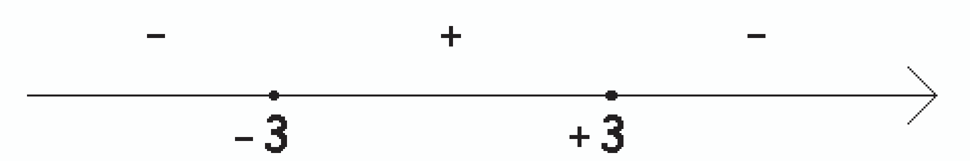
---

[i] Poiché l'espressione $\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$ viene utilizzata convenzionalmente per brevità quando non conosciamo il segno dell'infinito (addirittura, una funzione che tende a $\infty$ potrebbe ammettere due diversi limiti da sinistra e da destra, e quindi non ammetterne alcuno per x che tende ad $x_0$), bisogna evitare di sottintendere il segno di $+\infty$, visto che affermare che il limite di un'espressione è $+\infty$ è molto più preciso che non indicarlo con un generico $\infty$.

[ii] Praticamente le quantità che tendono a 0 di cui calcolare il segno saranno sempre al denominatore: infatti, se avessimo una forma del tipo $\frac{0}{1}$ il risultato sarebbe 0, e non ci sarebbe alcun bisogno di calcolare il segno del numeratore, mentre $\frac{0}{0}$ richiederebbe prima di tutto l'eliminazione della forma indeterminata.

$9-x^2=0$ per $x=\pm 3$, e quindi, essendo $\Delta>0$ (l'equazione ha due soluzioni reali e distinte) e a <0, $9-x^2>0$ per valori interni all'intervallo delle due radici (ovvero –3<x<3).

Graficamente:




È evidente che, per x che tende a 3 da sinistra (ovvero per valori minori di 3) il polinomio $9-x^2$ è positivo (e quindi tende a tende a $0^+$) perlomeno se x è abbastanza vicina a 3 (deve essere maggiore di –3), mentre quando x tende a 3 da destra (cioè per valori maggiori di 3) $9-x^2$ è negativo, e quindi tende a $0^-$.

Abbiamo quindi:

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{x+2}{9-x^2}=\frac{+5}{0^+}=+\infty .$$

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{x+2}{9-x^2}=\frac{+5}{0^-}=-\infty .$$

Per calcolare il segno del risultato abbiamo tenuto presente che il numeratore, visto che tende a 5 che è maggiore di 0, e positivo in un opportuno intorno bucato di 3, mentre il segno del denominatore è quello che abbiamo studiato.

Fine dell'esempio.

È chiaro che, se la quantità che tende a 0 è più complessa (per esempio, se contiene funzioni goniometriche, le relative disequazioni comportano maggiori difficoltà, per cui è bene ripassare tutti i tipi di disequazioni studiate (algebriche, goniometriche, ecc.).

Esempio con disequazione goniometrica:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}\cos x-3}{\sqrt{2}\operatorname{sen}x-1}=\frac{\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4}-3}{\sqrt{2}\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}-1}=\frac{\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}-3}{\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}-1}=\frac{\frac{2}{2}-3}{\frac{2}{2}-1}=\frac{-2}{0}.$$

Per la determinazione del limite esatto occorre quindi studiare il segno della quantità che tende a 0, ovvero:

$\sqrt{2}\operatorname{sen}x-1>0$, e quindi

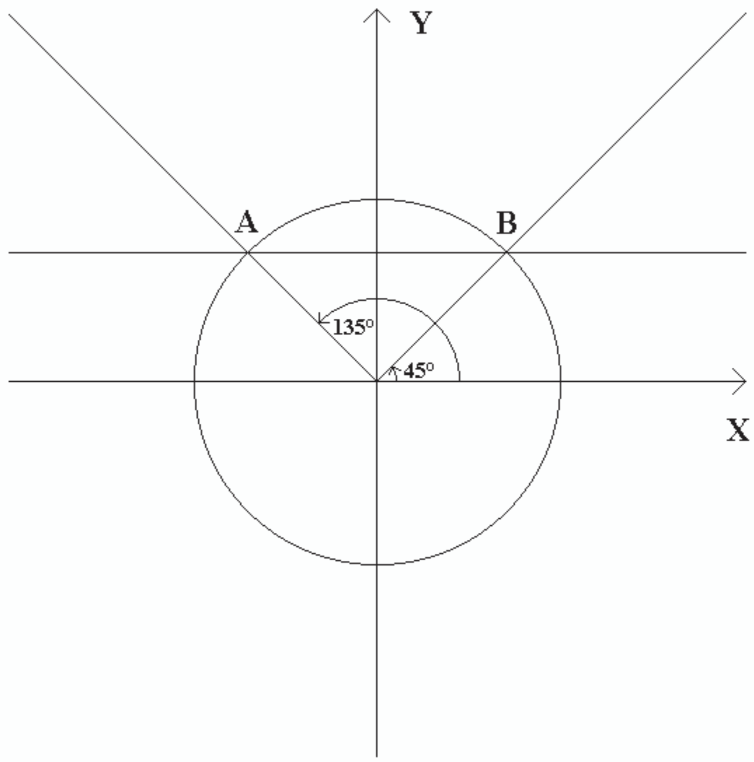
$$\operatorname{sen}x>\frac{1}{\sqrt{2}};\operatorname{sen}x>\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}};\operatorname{sen}x>\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ricordiamo che senx è, per definizione, l'ordinata del punto di intersezione P tra il secondo lato dell'angolo orientato x (avente il primo lato coincidente con il semiasse positivo delle x) e la circonferenza goniometrica (ovvero una circonferenza con centro nell'origine e raggio 1). Poniamo quindi $Y=\operatorname{sen}x$

(il seno è l'ordinata); la disequazione $\operatorname{sen}x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ diventa $Y > \frac{\sqrt{2}}{2}$. Mettiamo a sistema la disequazione ottenuta con l'equazione della circonferenza goniometrica $X^2 + Y^2 = 1$, dato che ad essa deve appartenere il punto P. ATTENZIONE! X (maiuscolo) qui è cosa diversa da x (minuscolo): la prima rappresenta l'ascissa di P (praticamente, il coseno di x), la seconda l'angolo.

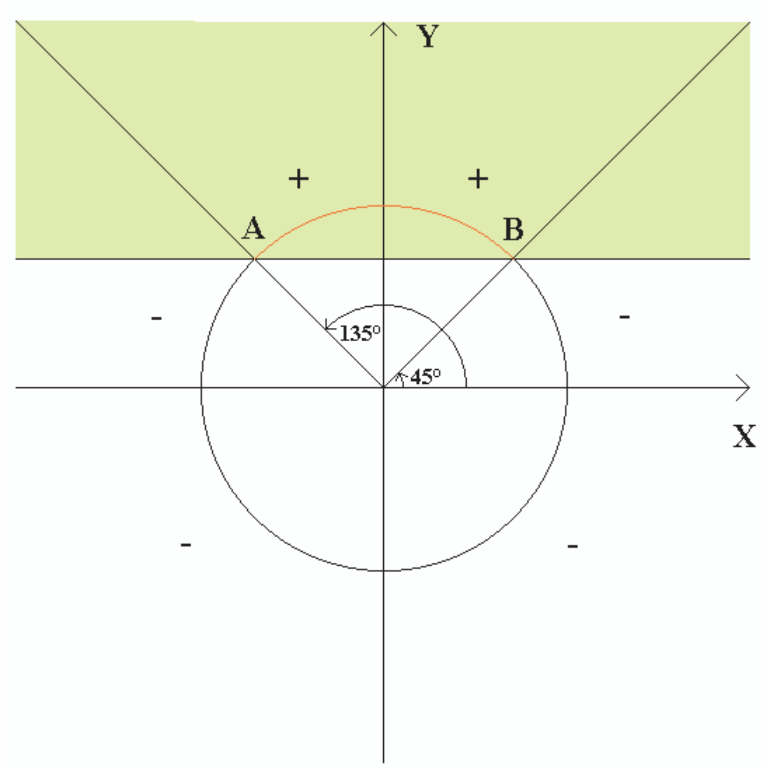
$$\begin{cases} Y > \frac{\sqrt{2}}{2} \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}.$$

Se un'equazione rappresenta, di norma, una linea nel piano cartesiano, una disequazione può essere associata ad un'intera zona del piano (analogamente a quando, in una cartina geografica, identifichiamo la zona occupata dall'Italia, o dall'Asia, o magari al comune di Roma). Come nella cartina, riusciamo ad identificare una zona del piano quando ne conosciamo i confini (l'Italia confina ad Ovest con la Francia, a Nord con Svizzera ed Austria, ecc.). IL CONFINE DEL ">" (o anche di "<", "≤" e "≥") È L'UGUALE: infatti un numero finisce di essere, per esempio, minore di 3, quando diventa uguale a 3. Per capire cosa rappresenta $Y > \frac{\sqrt{2}}{2}$, dobbiamo prima studiare quindi $Y = \frac{\sqrt{2}}{2}$, o meglio il sistema $\begin{cases} Y = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$.




Questa è l'equazione di una retta parallela all'asse X (ha la forma $Y = \text{costante}$), che interseca la circonferenza goniometrica in due punti (non ci interessa calcolarne le coordinate, ma solo determinarli graficamente); dalla figura si vede chiaramente che $Y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ corrisponde alle soluzioni x=45° $\left(\frac{\pi}{4}\right)$ e x=135°

$\left(\frac{3}{4}\pi\right)$. D'altronde, se $Y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ rappresenta una retta parallela all'asse X (tutti i punti che hanno la stessa ordinata), $Y > \frac{\sqrt{2}}{2}$ è il semipiano delimitato da tale retta che si trova al di sopra di essa. Come mettendo a sistema le equazioni $Y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $X^2 + Y^2 = 1$ troviamo i punti comuni alle due linee, le soluzioni di $\begin{cases} Y > \frac{\sqrt{2}}{2} \\ X^2 + Y^2 = 1 \end{cases}$ sono i punti comuni al semipiano $Y > \frac{\sqrt{2}}{2}$ e alla circonferenza goniometrica. Le soluzioni sono quelle comprese tra $\frac{\pi}{4}$ (punto B) e $\frac{3}{4}\pi$ (punto A), ma in questo caso non c'è neanche bisogno di risolvere le soluzioni: a noi interessa sapere il segno di $\sqrt{2}\operatorname{sen}x - 1$ nelle vicinanze di 45° $\left(\frac{\pi}{4}\right)$; ebbene, dalla figura qui sopra si evince che se x tende a $\frac{\pi}{4}$ da sinistra $\sqrt{2}\operatorname{sen}x - 1 < 0$, mentre da destra $\sqrt{2}\operatorname{sen}x - 1 > 0$. ATTENZIONE! Non confondete il fatto che diciamo che x tende ad un certo valore da sinistra o da destra con la sinistra e la destra del grafico della disequazione goniometrica! Muovendoci a destra in questo grafico facciamo aumentare la X (maiuscola), cioè il coseno dell'angolo x, e non x (minuscolo), che è l'angolo: quest'ultimo cresce facendo ruotare il secondo lato dell'angolo in senso antiorario, NON necessariamente verso destra. Quando diciamo che x tende a $\frac{\pi}{4}$ da destra intendiamo che si avvicina a questo valore mantenendosi minore di $\frac{\pi}{4}$. Per esempio, possiamo immaginare x=46° (poco più di 45°).



Esercizi.

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+4}{x^2-4}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+1}{\operatorname{sen} x}$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{6}}\frac{\cos x}{2\operatorname{sen} x-1}$$

**2) Limite all'infinito di un polinomio.**

Danno luogo, spesso, ad una forma indeterminata del tipo $+\infty-\infty$, e si risolvono mettendo in evidenza il termine di grado massimo[iii]. Si ricordi che tutte le quantità del tipo $\frac{1}{\infty^n}$, essendo n>0, danno come risultato 0.

Esempio:

$$\lim_{x\to -\infty}\left(5x^3-8x^2+2x-1\right)=\lim_{x\to -\infty}\left[x^3\left(\frac{5x^3}{x^3}-\frac{8x^2}{x^3}+\frac{2x}{x^3}-\frac{1}{x^3}\right)\right]=$$

$$\lim_{x\to -\infty}\left[x^3\left(5-\frac{8}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)\right]=(-\infty)^3\left(5-\frac{8}{-\infty}+\frac{2}{(-\infty)^2}-\frac{1}{(-\infty)^3}\right)=$$

$$-\infty\cdot(5-0+0-0)=-\infty\cdot 5=-\infty.$$

Esercizi:

$$\lim_{x\to -\infty}\left(8x^4+3x^3-x+9\right)$$

$$\lim_{x\to +\infty}\left(-3x^4+5x^3+3x^2+2x-13\right)$$

**3) Limite all'infinito, di una funzione razionale fratta (rapporto tra due polinomi).**

Danno luogo a forme indeterminate del tipo $\frac{\infty}{\infty}$, e spesso, al numeratore o al denominatore, anche forme del tipo $+\infty-\infty$. Si risolvono mettendo in evidenza, sia al numeratore che al denominatore, i rispettivi termini di grado massimo, per poi semplificare quanto possibile.

Esempio:

---

[iii] Si tenga presente che mettere in evidenza, per esempio, $x^3$, significa moltiplicare per tale quantità la funzione di cui si sta calcolando il limite, e quindi ogni termine del polinomio va diviso per la quantità messa in evidenza, per non alterare il valore della funzione.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-4x^2+x-1}{-3x^2-4x+5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3\left(1-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}{x^2\left(-3-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1-\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}{-3-\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}$$

$$=\frac{+\infty\left(1-\frac{4}{+\infty}+\frac{1}{(+\infty)^2}-\frac{1}{(+\infty)^3}\right)}{-3-\frac{4}{+\infty}+\frac{5}{(+\infty)^2}}=\frac{+\infty(1-0+0-0)}{-3-0+0}=\frac{+\infty}{-3}=-\infty.$$

Esercizi:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{6x^2-3x+8}{-2x^2+x-3}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2-2x+1}{-2x^3+5x^2-7x+4}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{7x^4-2x^3+3x^2-5x+3}{x^2-x+9}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^3-x^2+9x-8}{-2x^3+6x^2-x+11}$$

**4) Limite all'infinito di una funzione irrazionale intera o fratta (come 1 e 2, ma con in più almeno un termine che contiene la x sotto radice).**

Danno luogo a forme indeterminate del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ e $+\infty-\infty$, come nel caso precedente. Si risolvono, come nei casi precedenti, mettendo in evidenza i termini di grado massimo di numeratore e denominatore (o del solo numeratore, se la funzione non è fratta), e semplificando ove possibile, ma tenendo anche presenti le seguenti considerazioni:

a) una potenza di x presente sotto radice quadrata equivale ad una con esponente dimezzato (più in generale con esponente diviso per l'indice della radice). Per esempio, nelle espressioni $\sqrt{3x^4+5x^3-6x+3}$, $\sqrt{x-3}$ e $\sqrt[3]{5x^3+x^2-x+5}$, il termine di grado massimo è rispettivamente $x^2$, $\sqrt{x}$ e x.

b) Con particolare riferimento alle radici quadrate (regola analoga vale per tutte quelle con indice pari) l'espressione $\sqrt{9}$ indica il numero POSITIVO O NULLO che elevato al quadrato dà 9; in altre parole, $\sqrt{9}$=+3, mentre se scriviamo $-\sqrt{9}$ intendiamo –3. Quindi NON È SEMPRE VERO che $\sqrt{x^2}$=x, essendo il primo termine, per definizione, positivo o nullo, mentre x può anche risultare negativo. Per esempio, se x=-2, $\sqrt{x^2}=\sqrt{(-2)^2}=\sqrt{4}$=+2, e quindi in questo caso $\sqrt{x^2}$ NON è uguale ad x, ma a –x. In generale, se x≥0 $\sqrt{x^2}=x$, mentre se x<0 $\sqrt{x^2}=-x$ (o $-\sqrt{x^2}=x$, che è lo stesso). Poiché questo modo di procedere non risulta normalmente familiare, si consiglia vivamente di non saltare i passaggi, soprattutto quando x tende a $-\infty$ (e quindi è negativo).

c) Poiché non esiste radice dei numeri negativi, qualora il temine di grado massimo fosse una potenza dispari di x sotto radice quadrata (o, più in generale, con indice pari), non possiamo mettere in evidenza $\sqrt{x}$ (che non esiste se x<0, come accade per esempio se x tende a $-\infty$), ma $\sqrt{-x}$ (l'opposto di un numero negativo è positivo).

d) Nessuno dei problemi indicati alle lettere b) e c) sussiste se la radice ha indice dispari: per esempio, $\sqrt[3]{x^3}=x$; inoltre si può sempre mettere in evidenza (se necessario) $\sqrt[3]{x}$ anche se x è negativo.

Esempio:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{9x^2-4}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\frac{x}{x}-\frac{\sqrt{9x^2-4}}{x}\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\frac{x}{x}-\frac{\sqrt{9x^2-4}}{\sqrt{x^2}}\right)\right]=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(1-\sqrt{\frac{9x^2-4}{x^2}}\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(1-\sqrt{\frac{9x^2}{x^2}-\frac{4}{x^2}}\right)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(1-\sqrt{9-\frac{4}{x^2}}\right)\right]=$$

$$+\infty\cdot\left(1-\sqrt{9-\frac{4}{(+\infty)^2}}\right)=+\infty\cdot\left(1-\sqrt{9-0}\right)=+\infty\cdot(-2)=-\infty.$$

ATTENZIONE!!! Se fosse stato $x\to-\infty$, al posto di x avremmo dovuto sostituire $-\sqrt{x^2}$, e NON $\sqrt{x^2}$ !

Segui bene i passaggi nel seguente esempio:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x-\sqrt{9x^2-4}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left[x\left(\frac{x}{x}-\frac{\sqrt{9x^2-4}}{x}\right)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[x\left(\frac{x}{x}-\frac{\sqrt{9x^2-4}}{-\sqrt{x^2}}\right)\right]=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[x\left(1+\sqrt{\frac{9x^2-4}{x^2}}\right)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[x\left(1+\sqrt{\frac{9x^2}{x^2}-\frac{4}{x^2}}\right)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[x\left(1+\sqrt{9-\frac{4}{x^2}}\right)\right]=$$

$$-\infty\cdot\left(1+\sqrt{9-\frac{4}{(+\infty)^2}}\right)=-\infty\cdot\left(1+\sqrt{9-0}\right)=-\infty\cdot(+4)=-\infty.$$

Altro esempio:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2-\sqrt{2-x}}{x+\sqrt{4x^2-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{-x}\left(\frac{2}{\sqrt{-x}}-\frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{-x}}\right)}{x\left(\frac{x}{x}+\frac{\sqrt{4x^2-x}}{x}\right)}=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{-x}\left(\frac{2}{\sqrt{-x}}-\sqrt{\frac{2-x}{-x}}\right)}{x\left(1+\frac{\sqrt{4x^2-x}}{-\sqrt{x^2}}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{-x}}{x}\cdot\frac{\frac{2}{\sqrt{-x}}-\sqrt{\frac{2}{-x}-\frac{x}{-x}}}{1-\sqrt{\frac{4x^2-x}{x^2}}}=$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{-x}}{-\sqrt{x^2}}\cdot\frac{\frac{2}{\sqrt{-x}}-\sqrt{\frac{2}{-x}+1}}{1-\sqrt{\frac{4x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}-\sqrt{-\frac{x}{x^2}}\cdot\frac{\frac{2}{\sqrt{-x}}-\sqrt{\frac{2}{-x}+1}}{1-\sqrt{4-\frac{1}{x}}}=$$

$$\lim_{x\to-\infty}-\sqrt{-\frac{1}{x}}\cdot\frac{\frac{2}{\sqrt{-x}}-\sqrt{\frac{2}{-x}+1}}{1-\sqrt{4-\frac{1}{x}}}=-\sqrt{-\frac{1}{-\infty}}\cdot\frac{\frac{2}{\sqrt{-(-\infty)}}-\sqrt{\frac{2}{-(-\infty)}+1}}{1-\sqrt{4-\frac{1}{(-\infty)}}}=$$

$$-\sqrt{\frac{1}{+\infty}}\cdot\frac{\frac{2}{\sqrt{+\infty}}-\sqrt{\frac{2}{+\infty}+1}}{1-\sqrt{4-\frac{1}{(+\infty)}}}=0\cdot\frac{0-\sqrt{0+1}}{1-\sqrt{4-0}}=0\cdot\frac{-1}{-1}=0.$$

Esercizi:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{9-4x}-x+1}{2x+4-\sqrt{5-4x}}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{5-x}-\sqrt{7-3x}}{\sqrt{10-x}-\sqrt{11-2x}}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{9+4x^2}}{\sqrt{25x^2-1}-\sqrt{16x^2-9}}$$

## 5) Forme del tipo $\frac{0}{0}$: funzioni razionali fratte.

Le forme indeterminate del tipo $\frac{0}{0}$ si risolvono semplificando o utilizzando alcuni limiti detti limiti notevoli. Cominciamo a prendere in esame il caso di un quoziente tra due polinomi (funzione razionale fratta). Se, per $x=x_0$, numeratore e denominatore si annullano, entrambi sono divisibili per $x-x_0$. Se possibile, la strada più semplice è quindi quella di scomporre in fattori numeratore e denominatore della frazione, semplificare e sostituire al posto di x il valore $x_0$.

Esempio:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2-4}=\frac{8-8}{4-4}=\frac{0}{0} \text{ (forma indeterminata)}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x+4}{x+2}=\frac{4+4+4}{2+2}=\frac{12}{4}=3$$

Per scomporre il numeratore è stato usato il prodotto notevole $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ (differenza di due cubi); mentre il denominatore è una differenza di due quadrati, ovvero $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

Altro esempio:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-2x+2}{x^2-1}=\frac{1-1-2+2}{1-1}=\frac{0}{0} \text{ (forma indeterminata)}$$

Mettendo in evidenza, al numeratore, $x^2$ dai primi due termini e -2 dagli altri (fattorizzazione parziale) si ha:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2-2x+2}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2(x-1)-2(x-1)}{(x+1)(x-1)}.$$

Mettiamo in evidenza $x-1$ al numeratore; otteniamo

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2(x-1)-2(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^2-2)(x-1)}{(x+1)(x-1)}=\frac{x^2-2}{x+1}=\frac{1-2}{1+1}=-\frac{1}{2}.$$

Terzo esempio:

$$\lim_{x\to -2}\frac{2x^2+3x-2}{2x+4}=\frac{8-6-2}{-4+4}=\frac{0}{0} \text{ (forma indeterminata)}$$

Per scomporre in fattori un trinomio di secondo grado si può tenere presente la formula $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, dove $x_1$ e $x_2$ solo le soluzioni dell'equazione $ax^2+bx+c=0$. Risolviamo quindi l'equazione $2x^2+3x-2=0$.

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{4}=\frac{-3\pm 5}{4}=\left\langle\begin{array}{l}\dfrac{-3-5}{4}=-2\\[2ex]\dfrac{-3+5}{4}=1\end{array}\right. .$$

Di conseguenza $2x^2+3x-2=2(x+2)(x-1)$, da cui

$$\lim_{x\to -2}\frac{2x^2+3x-2}{2x+4}=\lim_{x\to -2}\frac{2(x+2)(x-1)}{2(x+2)}=\lim_{x\to -2}(x-1)=-2-1=-3.$$

Quarto esempio:

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x^5-4x^3+2x^2-4x+3}{5x-5}=\frac{3-4+2-4+3}{5-5}=\frac{0}{0}.$$

In questo caso, non essendo possibile usare i metodi precedenti per scomporre in fattori il numeratore, utilizzeremo il teorema fondamentale dell'algebra, secondo cui se un polinomio si annulla per $x = x_0$ se e solo se è divisibile per $x - x_0$. Poiché sostituendo 1 al posto di x si annullano sia il numeratore che il denominatore, entrambi risultano divisibili per $x - 1$. Possiamo quindi utilizzare la regola di Ruffini per dividere $3x^5 - 4x^3 + 2x^2 - 4x + 3$ per $x - 1$.

Inseriamo i coefficienti del dividendo nella prima riga (si ricordi di inserire uno zero per ogni termine mancante, nel nostro caso $x^4$) e il valore di $x_0$ nello spazio a sinistra (stiamo dividendo per $x - x_0$). Riportiamo il primo termine (+3) della riga superiore in quella inferiore, inseriamo il prodotto dei termini della terza riga per $x_0$ negli spazi a destra della seconda , e la somma dei primi due valori di una colonna nel suo spazio vuoto. Alla fine del calcolo l'ultima riga conterrà i coefficienti del risultato (tranne l'ultimo valore, che DEVE essere 0 essendo il resto della divisione).

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | +3 | 0 | −4 | +2 | −4 | +3 |
| +1 | | +3 | +3 | −1 | +1 | −3 |
| | +3 | +3 | −1 | +1 | −3 | // |

E poiché stiamo dividendo un polinomio di 5° grado per un di 1°, il risultato deve essere di 4°, cioè $\frac{3x^5 - 4x^3 + 2x^2 - 4x + 3}{x - 1} = 3x^4 + 3x^3 - x^2 + x - 3$, da cui $3x^5 - 4x^3 + 2x^2 - 4x + 3 = (3x^4 + 3x^3 - x^2 + x - 3)(x - 1)$. Il risultato dell'esercizio è perciò il seguente:

$$\lim_{x\to 1} \frac{3x^5 - 4x^3 + 2x^2 - 4x + 3}{5x - 5} = \lim_{x\to 1} \frac{(3x^4 + 3x^3 - x^2 + x - 3)(x - 1)}{5(x - 1)} =$$
$$= \lim_{x\to 1} (3x^4 + 3x^3 - x^2 + x - 3) = 3 + 3 - 1 + 1 - 3 = 3.$$